Subject : .....

$\Rightarrow \vec{c} = -4\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ (Ans.)

$|\vec{c}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 4^2}$
$= \sqrt{41}$

Vector Operator

অপারেটর : অপারেটর হচ্ছে একটি গাণিতিক রাশি যা একটি ফাংশনের উপর প্রযুক্ত হয়ে তাকে অন্য ফাংশনে পরিণত করে।

চ ও ছ দুটি Number
চ + ছ = ৪, এখানে + চিহ্ন অপারেটর হিসেবে কাজ করেছে।

ভেক্টর অপারেটর : ত্রিমাত্রিক ভৌত রাশির বৈশিষ্ট্য বিশ্লেষণ ও বিভিন্ন সমস্যা সমাধানের প্রয়োজনে স্যার হেমিল্টন ভেক্টর ডিফারেনশিয়াল অপারেটর ∇ উদ্ভাবন করেন এবং একে ন্যাবলা নামে অভিহিত করেন। পরবর্তীতে উইলিয়াম গিবস এর নামকরণ করেন 'ডেল'।

ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায়, $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$

এটি কোনো ভেক্টর রাশি নয়। শুধু ভেক্টর অপারেটর মাত্র। তবে এটি ভেক্টরের মতো আচরণ করে।

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

$\frac{\partial}{\partial x}$ অপারেটরে যদি কোনো রাশি দেওয়া হয় তবে সে শুধুমাত্র x কে চলক এবং বাকিসবকিছুকে ধ্রুবক জ্ঞান করে স্বাভাবিক নিয়মে রাশিটি Differentiation করে।

অনুরূপ $\frac{\partial}{\partial y}$ এবং $\frac{\partial}{\partial z}$

$\vec{\nabla}$ এর বিভাজনসমূহ :

(i) $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i}$ (একমাত্রিক)

(ii) $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j}$ দ্বিমাত্রিক

(iii) $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$ (ত্রিমাত্রিক)

পদার্থবিজ্ঞানে $\vec{\nabla}$ এর ব্যবহার :

(i) $\vec{\nabla}$ এর সাহায্যে তিনটি ভেক্টর রাশি গ্রাডিয়েন্ট, ডাইভারজেন্স ও কার্ল এর সংজ্ঞা দেওয়া যায়।

(i) তড়িৎ ক্ষেত্র প্রাবল্য, তড়িৎ বিভব, মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র প্রাবল্য ও মহাকর্ষীয় বিভব নির্ণয়ে $\vec{\nabla}$ ব্যবহৃত হয়।

(iii) প্রবাহী গতিবিদ্যা, তড়িৎ গতিবিদ্যা ও কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় $\vec{\nabla}$ এর গুরুত্বপূর্ণ ব্যবহার রয়েছে।

(iv) ম্যাক্সওয়েলের বিখ্যাত চারটি সমীকরণ প্রতিষ্ঠায় $\vec{\nabla}$ এর ব্যবহার গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

পালন করে।

(v) স্টোকস এর উপপাদ্য, গাউসের উপপাদ্যে $\vec{\nabla}$ ব্যবহৃত হয়।

ল্যাপ্লাসিয়ান অপারেটর :

আমরা জানি, $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

একে ল্যাপ্লাসিয়ান অপারেটর বলা হয়।

∇^2 এর ব্যবহার: মহাকর্ষ তত্ত্ব, প্রবাহী গতিবিদ্যা, কোয়ান্টাম বলবিদ্যা, তড়িৎ গতিবিদ্যা, নিষ্ক্রিয় পদার্থবিজ্ঞান ও ইলেকট্রনিক্স সহ পদার্থ ও গণিতের বিভিন্ন সমস্যা সমাধানে ল্যাপ্লাসিয়ান অপারেটর ব্যবহৃত হয়।

ক্ষেত্র : পদার্থবিজ্ঞানে ক্ষেত্র বলতে একটি নির্দিষ্ট অঞ্চলের কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্কের ফাংশনকে বোঝায়। ক্ষেত্রের প্রতিটি বিন্দুর সাথে একটি ভৌত গুণ যুক্ত থাকে। এ ভৌত গুণ স্কেলার বা ভেক্টর হতে পারে। ভৌত গুণের বিশ্লেষণে ক্ষেত্র দুই প্রকার। যথা :

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

(i) স্কেলার ক্ষেত্র : ক্ষেত্রের প্রতিটি বিন্দুর সাথে সংশ্লিষ্ট ভৌত রাশি যদি স্কেলার হয়, তবে ঐ ক্ষেত্রকে স্কেলার ক্ষেত্র বলে। তাপমাত্রা, তড়িৎ বিভব, ঘনত্ব ইত্যাদি স্কেলার ক্ষেত্রের উদাহরণ।

কোনো অঞ্চলের প্রতিটি বিন্দু (x,y,z) এর সংশ্লিষ্ট রাশি স্কেলার হলে ঐ বিন্দুর ফাংশন ϕ কে ঐ অঞ্চলের স্কেলার ক্ষেত্র বলে।

গাণিতিক ভাবে $\phi(x,y,z) = x^2yz + 3x^2y - y^3z^2$ একটি স্কেলার ক্ষেত্র নির্দেশ করে।

(ii) ভেক্টর ক্ষেত্র : ক্ষেত্রের প্রতিটি বিন্দুর সাথে সংশ্লিষ্ট ভৌত গুণ যদি ভেক্টর হয় তবে ঐ ক্ষেত্রকে ভেক্টর ক্ষেত্র বলা হয়। যেমন : তড়িৎক্ষেত্র, চৌম্বকক্ষেত্র ইত্যাদি ভেক্টর ক্ষেত্রের উদাহরণ।

গাণিতিক ভাবে, $\vec{F}(x,y,z) = x^2yz\hat{i} - xy\hat{j} + 2xy\hat{k}$ একটি ভেক্টর ক্ষেত্র নির্দেশ করে।

গ্র্যাডিয়েন্ট (Gradient)

ভেক্টর অপারেটর $\vec{\nabla}$ স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন ϕ এর উপর অপারেট করলে যে রাশি পাওয়া যায় তাকে (x,y,z) অবস্থানে ϕ এর Gradient বলে।

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

গ্রাডিয়েন্ট অর্থ হলো নতির পরিমাণ বা নতির মাত্রা φ এর গ্রাডিয়েন্ট

$$\vec{\nabla}\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\varphi$$

$$\text{Grad of } \varphi = \vec{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

কাজেই অবস্থানের সাপেক্ষে কোনো স্কেলার ক্ষেত্র φ এর সর্বোচ্চ পরিবর্তনের হারই এ ক্ষেত্রের Gradient. Grad φ একটি ভেক্টর ফলে এটি একটি ভেক্টর ক্ষেত্র।

গ্রাডিয়েন্টের তাৎপর্য (Physical significance of Gradient)

(i) একটি স্কেলার ফাংশনের গ্রাডিয়েন্ট একটি ভেক্টর রাশি।

(ii) একটি স্কেলার ক্ষেত্রের গ্রাডিয়েন্ট হল একটি ভেক্টর ক্ষেত্র।

(iii) স্কেলার রাশির সর্বাধিক বৃদ্ধির হারই হল উক্ত ভেক্টর ক্ষেত্রের মান।

(iv) স্কেলার রাশির পরিবর্তন বিন্দুর স্থানাঙ্কের পরিবর্তনের দিকের উপর নির্ভরশীল।

(v) গ্রাডিয়েন্ট নতির মাত্রা প্রকাশ করে।

সমস্যা ও সমাধান

Pbm→01: যদি $\varphi = (2xz^4 - 3x^2y)$ হয় তবে $(2,-1,0)$ বিন্দুতে নতিমাত্রা ও গ্রাডিয়েন্ট নির্ণয় কর।

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

Solⁿ: Grad of $\varphi = \vec{\nabla}\varphi$ $\vec{\nabla}\varphi$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)(2xz^4 - 3x^2y)$$

$$= 2z^4\hat{i} - 6y\hat{j} - 3x^2\hat{j} + 8xz^3$$

$$\cancel{= 2z^4\hat{i} - \hat{j}(6y - 3x^2) + 8xz^3}$$

$$= (2z^4 - 6yx)\hat{i} - 3x^2\hat{j} + 8xz^3\hat{k}$$

(2,-1,0) বিন্দুতে grad of $\varphi = \cancel{+(6\times2\times0)\hat{i} - 3\times2^2\hat{j} + 8\times2}$

$$= 12\hat{i} - 12\hat{j} \text{ (Ans.)}$$

Pbm→02: $\vec{A} = 2x^2\hat{i} - 3yz\hat{j} + xz^2\hat{k}$

$\varphi = 2z - x^3y$

(1,-1,1) বিন্দুতে $\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\varphi$ নির্ণয় কর।

Solⁿ: $\vec{\nabla}\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)(2z - x^3y)$

$$= -3x^2y\hat{i} - x^3\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\varphi = (2x^2\hat{i} - 3yz\hat{j} + xz^2\hat{k})\cdot(-3x^2y\hat{i} - x^3\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$= -6x^4y + 3x^3yz + 2xz^2$$

(1,-1,1) বিন্দুতে $\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\varphi = 6 - 3 + 2$

$$= 5 \text{ (Ans.)}$$

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

Pbm→03: $\varphi = (2xy^4 - 3x^3y^3 + 4z^2y^3)$ এর $(1,2,-3)$ বিন্দুতে নতিমাত্রা নির্ণয় কর।

Solⁿ: $\vec{\nabla}\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)(2xy^4 - 3x^3y^3 + 4z^2y^3)$

$= (2y^4 - 6x^2y^3)\hat{i} + (8xy^3 - 9y^2x^3 + 12z^2y^2)\hat{j}$

$+ 8zy^3\hat{k}$

$\therefore$ $(1,2,-3)$ বিন্দুতে নতিমাত্রা $= (32-48)\hat{i} + (16-36)\hat{j}$

$+ -192\hat{k}$

$= -16\hat{i} - 20\hat{j} - 192\hat{k}$

ডাইভারজেন্স (Divergence)

$\vec{V}(x,y,z)$ একটি ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্কে ভেক্টর ক্ষেত্র হলে এবং

$\vec{V} = V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k}$

ভেক্টর অপারেটর $\vec{\nabla}$ এবং ভেক্টর পয়েন্ট ফাংশন $\vec{V}$ এর স্কেলার বা ডট গুণফলকে ভেক্টর ক্ষেত্র $\vec{V}$ এর ডাইভারজেন্স বলে।

অর্থাৎ, $\text{div}\,\vec{V} = \vec{\nabla}\cdot\vec{V}$

$\text{div}\,\vec{V} = \vec{\nabla}\cdot\vec{V}$

$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot(V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k})$

$= \frac{\partial}{\partial x}V_x + \frac{\partial}{\partial y}V_y + \frac{\partial}{\partial z}V_z$

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

ডাইভারজেন্সের ভৌত তাৎপর্য (Physical significance of Divergence)

(i) ডাইভারজেন্স একটি স্কেলার ক্ষেত্র

(ii) ডাইভারজেন্সের অর্থ হল অপসারণ ও বিস্তৃতি।

(iii) $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$ দ্বারা একক সময়ে এক আয়তনের কোনো প্রবাহীর ঘনত্বের হ্রাসের হার বোঝায়।

(iv) দুটি ভেক্টর $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর ক্ষেত্রে $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$ কিন্তু $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} \neq \vec{v}\cdot\vec{\nabla}$

(v) ডাইভারজেন্স হলো এমন একটি অপারেটর যা কোনো বিন্দুতে ভেক্টর ক্ষেত্রের উৎস বা sink এর মান পরিমাপ করে।

(vi) কোনো ভেক্টর রাশি $\vec{v}$ এর ডাইভারজেন্স শূন্য হলে অর্থাৎ $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$ হলে উক্ত ভেক্টরকে ঘোলাহৃতি বা সলিনয়ডাল হবে। যে আয়তনের তরলের আগমন ঘটে ঠিক সেই আয়তনের তরলের নির্গমন ঘটলে সে অবস্থাকে সলিনয়ডাল হবে।

(vii) ডাইভারজেন্সের মান ধনাত্মক হলে তরলের আয়তন বৃদ্ধি ও ঘনত্ব হ্রাস নির্দেশ করে। ডাইভারজেন্সের মান ঋণাত্মক হলে তরলের আয়তন হ্রাস ও ঘনত্ব বৃদ্ধি নির্দেশ করে।

(viii) বায়ুর বেগ হলো ভেক্টর ক্ষেত্র। বায়ুকে উত্তপ্ত করলে উত্তপ্ত হবার সময় তা প্রসারিত হয়। তাই

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

এই বেগ ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্সকে পরিচিত করা হয়। অপরপক্ষে বায়ু শীতলীকরণের সময় সংকুচিত হয়। তাই এই বেগ ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্সকে Negative করা হয়।

সমস্যা ও সমাধান

Pbm→01: $\vec{E} = 3x^2y\hat{i} + (2x-3y^2)\hat{j} + 4z^2y\hat{k}$.
(1,2,−1) বিন্দুতে div নির্ণয় কর।

Solⁿ: $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot\left(3x^2y\hat{i} + (2x-3y^2)\hat{j} + 4z^2y\hat{k}\right)$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 6xy - 6y + 8yz$

$\therefore$ (1,2,−1) বিন্দু div of $\vec{E} = 12 - 12 - 16$
$= -16$

Pbm→02: $\vec{A} = (2yz^2 + 4z^3y)\hat{i} + (3xz^2 - 8zx^3)\hat{j} + (9xy^2 + 4xy^3)\hat{k}$
দেখাও যে ক্ষেত্রটি সলিনয়ডাল

Solⁿ: div ~~of~~ of $\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot\{(2yz^2 + 4z^3y)\hat{i}$

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

$+ (3xz^2 - 8zx^3)\hat{j} + (9xy^2 + 4xy^3)\hat{k}$

$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$

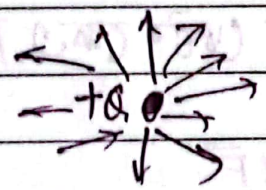
$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$

$\therefore$ div of $\vec{A} = 0$

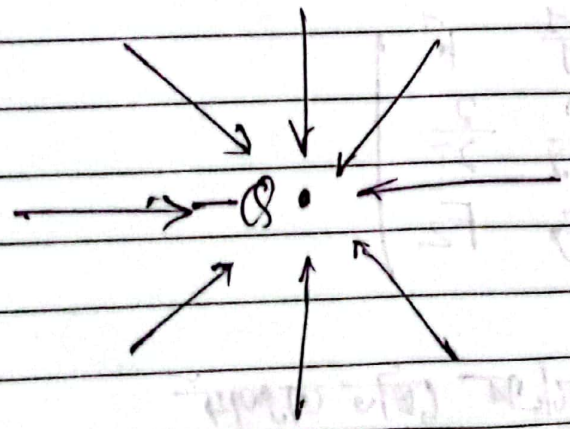
সুতরাং ক্ষেত্রটি সলিনয়ডাল।

MCQ Topic

Positive চার্জের আশেপাশের যেকোনো বিন্দুতে div positive



Negative চার্জের ভেক্টর ক্ষেত্রের যেকোনি যেকোনো বিন্দুতে divergence Negative হবে।

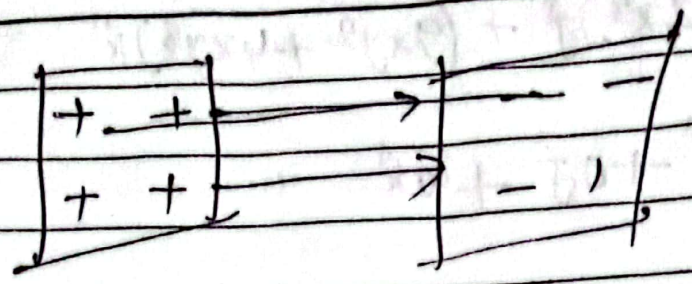


সুষম ভেক্টর ক্ষেত্রের divergence = 0.

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....



Curl (কার্ল)

$F(x,y,z)$ ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্কের ভেক্টর ক্ষেত্র এবং

$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$$

এবং ভেক্টর অপারেটর, $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$

ভেক্টর অপারেটর $\vec{\nabla}$ এবং ভেক্টর পয়েন্ট ফাংশন $\vec{F}$ এর ভেক্টর বা ক্রস গুণফলকে ভেক্টর ক্ষেত্র $\vec{F}$ এর curl বলে।

অর্থাৎ curl $\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \times \left(F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Curl এর ভৌত তাৎপর্য

(1) কার্ল একটি vector ক্ষেত্র যার অর্থ ঘূর্ণন।

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

② কোনো গতির বেগের কার্ল অশূন্য হলে ঐ গতিকে ঘূর্ণন গতি বলে।

③ কোনো ভেক্টর রাশির কার্ল শূন্য না হলে অর্থাৎ $\vec{\nabla} \times \vec{F} \neq 0$ হলে $\vec{F}$ অঘূর্ণনশীল বা সংরক্ষণশীল হবে।

④ কোনো ভেক্টর রাশির কার্ল শূন্য হলে অর্থাৎ $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ হলে $\vec{F}$ অঘূর্ণনশীল ও সংরক্ষণশীল হবে।

সমস্যা ও সমাধান

Pbm→01: $\vec{A} = 2x^3\hat{i} + 3yz^2\hat{j} + 4xz\hat{k}$ এর curl নির্ণয় কর।

Solⁿ: $\text{curl}\,\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot \left(2x^3\hat{i} + 3yz^2\hat{j} + 4xz\hat{k}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x^3 & 3yz^2 & 4xz \end{vmatrix}$$

$$= -6yz\hat{i} - 4z\hat{j} \quad \text{(Ans.)}$$

* যদি কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল 0 হয় তবে উক্ত ভেক্টর ক্ষেত্রটি অঘূর্ণনশীল ও সংরক্ষণশীল।

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

* curl $\neq 0$ → ঘূর্ণনশীল এবং অসংরক্ষণশীল

Pbm→02: বঙ্গোপসাগরে ঝড়ো বায়ু প্রবাহের বেগের ক্ষেত্র, $\vec{V} = (3x^2\hat{i} + 4xy\hat{j} + 3zy^2\hat{k})\,ms^{-1}$

(i) (1,2,1) বিন্দুতে বেগ ভেক্টরটি নির্ণয় কর এবং বেগের মান নির্ণয় কর।

(ii) ঘূর্ণিঝড় সৃষ্টি হবে কিনা-গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।

Solⁿ: (1,2,1) বিন্দুতে $\vec{V} = (3\hat{i} + 8\hat{j} + 12\hat{k})\,ms^{-1}$

$$V = \sqrt{3^2 + 8^2 + 12^2}$$

$$= \sqrt{209}$$

(ii) curl of $\vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V}$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2 & 4xy & 3zy^2 \end{vmatrix}$$

$$= 6yz\hat{i} + 4y\hat{k}$$

∵ curl of $\vec{V} \neq 0$ সুতরাং ঘূর্ণিঝড় সৃষ্টি হওয়ার সম্ভাবনা আছে।

JANANI

Scanned with CamScanner

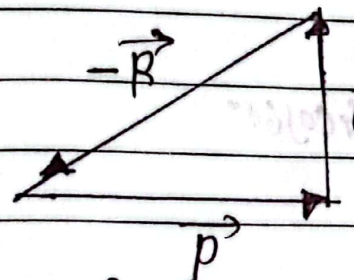
Subject : ..... Date : .....

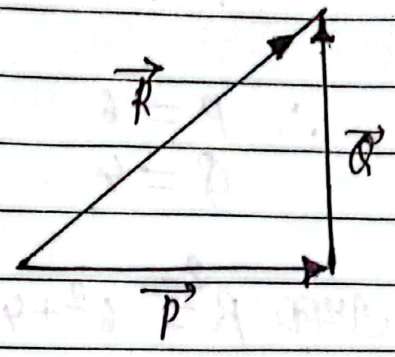
MCQ

① নিচের কোন তিনটি ভেক্টরের লব্ধি শূন্য হতে পারে না?
(i) 11, 11, 11 (ii) 5, 10, 14 (iii) 5, 10, 10 (iv) 5, 10, 20

Solⁿ: এখানে, $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$

$\vec{P} + \vec{Q} - \vec{R} = 0$





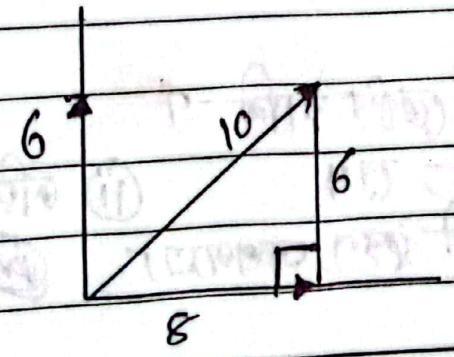
অর্থাৎ তিনটি ভেক্টরের লব্ধি তখনই 0 হবে যখন ঐ তিনটি ভেক্টর দ্বারা ত্রিভুজ গঠন করা যাবে।

উপরিউক্ত option এ 5, 10, 20 দ্বারা কোনো ত্রিভুজ গঠন করা যায় না। তাই 5, 10, 20 ভেক্টরগুলোর লব্ধি 0 হতে পারে না।

② 10 একক মানের একটি ভেক্টরকে দুটি লম্ব উপাংশে দুটি লম্ব লম্বাংশে বিভক্ত করলে, একটি 6 একক হলে অপরটি কত?

Solⁿ:

Ans: 8.



JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

(3) দুটি ভেক্টরের ক্ষুদ্রতম ও বৃহত্তম লব্ধি 2 ও 10 একক। তারা 60° কোণে ক্রিয়া করলে লব্ধি কত?

Solⁿ: $P+Q = 10$

$P-Q = 2$

$\therefore P = 6$

$Q = 4$

এখন, $R^2 = 6^2+4^2+2\times6\times4\cos60°$

$= 52+24$

$\therefore R = \sqrt{76}$

$= 8.71$ (Ans)

(4) 5N এর দুটি সমান বল পরস্পর 120° কোণে ক্রিয়ারত থাকলে লব্ধির মান কত হবে?

Solⁿ: $R^2 = 5^2+5^2+2\times5\times5\times-\frac{1}{2}$

$R = \sqrt{50-25}$

$= 5$

Shortcut: দুটি সমান মানের ভেক্টরের লব্ধি যেকোনো একটি ভেক্টরের মানের সমান হলে সমান বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 120°।

(5) কোন দুইটি ভেক্টর রাশি?

(i) গতিশক্তি, বেগ (ii) তড়িৎ বিভব, ত্বরণ

(iii) কেন্দ্রমুখী ত্বরণ, ভরবেগ (iv) তড়িৎ ক্ষেত্র, বল

JANANI

Scanned with CamScanner

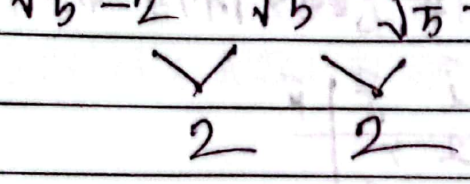
Subject : ..... Date : .....

(6) একটি লন রোলারকে ভূমির সাথে α কোণে টানা হলে অনুভূমিক উপাংশের মান কত?

Solⁿ: $F\sin\alpha$

(7) $(\sqrt{5}-2)N$, $\sqrt{5}N$, $(\sqrt{5}+2)N$ বলত্রয় কোনো বিন্দুতে 120° কোণে ক্রিয়ারত থাকলে লব্ধি কত?

Solⁿ:



∴ লব্ধি = √3 × সাধারণ অন্তর

= 2√3 N.

(8) একটি নদীতে অনুকূলে বেগ 20 kmh^{-1}, প্রতিকূলে বেগ 6 kmh^{-1}, নদীর প্রস্থ 26 km, নদী পার হতে সময় t হলে,

(i) $t \geq 2h$ (ii) $t \leq 2h$ (iii) $t \geq 2.37h$

Solⁿ: $u+v = 20$

$v-u = 6$

∴ $v = 13 kmh^{-1}$ এবং $u = 7 kmh^{-1}$

সর্বনিম্ন সময়, $t_{min} = \frac{d}{v} = \frac{26 km}{13 kmh^{-1}}$

$= 2h$

Ans: $t \geq 2h$.

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

(9) $\vec{A} = 2\hat{i}$ ভেক্টরটির বিপরীত ভেক্টর কোনটি ?

Ans: $-2\hat{i}$

বি:দ্র → $2\hat{i}$ এর বিপরীত ভেক্টর $= \frac{1}{2}\hat{i}$

(10) $\vec{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j}$
$\vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j}$
$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর সমতলীয় ভেক্টর নির্ণয় কর।

Soln: $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 4 & \\ 3 & -2 & \end{vmatrix}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{P} = (-4-12)\hat{k}$$
$$= -16k$$

$$\vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{C} \cdot \vec{P} = 0$$
$$= \cancel{CP \sin CP \cos(\vec{C}, \vec{P})} = 0$$

$$\Rightarrow (C_x\hat{i} + C_y\hat{j} + C_z\hat{k}) \cdot (-16\hat{k}) = 0$$
$$= -16C_z = 0$$
$$= C_z = 0$$

$$\Rightarrow \vec{C} = C_x\hat{i} + C_y\hat{j}$$ (Ans.)

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

(11) ভেক্টরের লব্ধি নির্ণয়ের সূত্র নয় কোনটি?

(i) সামান্তরিক সূত্র

(ii) ত্রিভুজ সূত্র

(iii) লম্বাংশ উপপাদ্য

(iv) উপাংশ বিভাজন ✓

(12) কোনো ভেক্টরের গুণাত্মক বিপরীত ভেক্টরকে বিপ্রতীপ ভেক্টর বলে।

(13) P ও Q এর লব্ধি R হলে নিচের কোনটি সঠিক?

(i) $P-Q < R < P+Q$ (ii) ~~$P-Q <= R <=$~~

(ii) $P-Q \leq R \leq P+Q$ ✓

(iii) $P-Q \geq R \geq P+Q$

(iv) $P-Q \geq R \leq P+Q$

(14) দুটি ভেক্টরের লব্ধির সর্বোচ্চ মান 11 ও সর্বনিম্ন মান 3 হলে এবং ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধির মান কত?

Soln: $\left.\begin{array}{l} P+Q=11 \\ P-Q=3 \end{array}\right\}$ $P=7$, $Q=4$

$R=\sqrt{7^2+4^2} = \sqrt{65}$

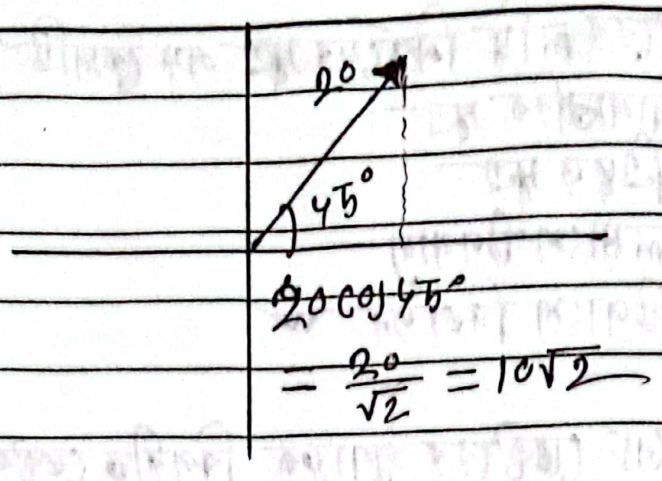
(15) বায়ু উত্তর পূর্বদিকে 20m/s বেগে বইছে। বাতাসের বেগের পূর্বমুখী উপাংশের মান কত?

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

Solⁿ:



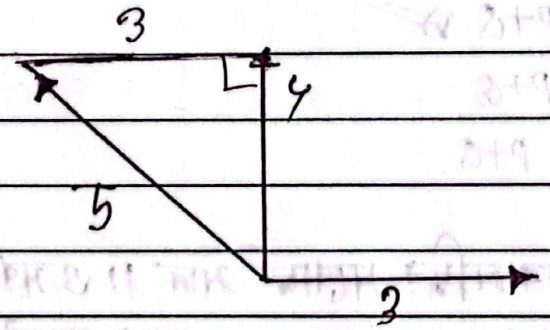
$20\cos 45°$

$= \frac{20}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{2}$

$10\sqrt{2}\,ms^{-1}$ (Ans.)

(16) কোনো বিন্দু ক্রিয়ারত দুটি ভেক্টরের লব্ধি, ক্ষুদ্রতম ভেক্টরের সাথে সমকোণে ক্রিয়া করে। লব্ধি 4 একক, ক্ষুদ্রতম ভেক্টর 3 একক হলে বৃহত্তম ভেক্টর কত?

Solⁿ:



5 একক (Ans.)

(17) দুটি ভেক্টরের ক্রস গুণফলের মান 3, ডট গুণফলের মান $3\sqrt{3}$। ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত?

Solⁿ: $|\vec{A}\times\vec{B}| = AB\sin\theta = 3$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta = 3\sqrt{3}$

$\therefore \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30°$

$\theta = 30°$ (Ans.)

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

(18) a এর মান কত হলে $3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $6\hat{i} + a\hat{k} + c\hat{j}$ ভেক্টরটি সমান্তরাল হবে?

Solⁿ: $\frac{3}{6} = \frac{-2}{a}$

$\Rightarrow a = -4$

(19) $\vec{A} = 2\hat{i} - 0.5\hat{j} + 3\hat{k}$ এর সমান্তরাল ভেক্টর নিচের কোনটি?

(i) $4\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$
(ii) $4\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$
(iii) $4\hat{i} - \hat{j} + 6\hat{k}$
(iv) $3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$

(20) a এর মান কত হলে $a\hat{i} - 5\hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $a\hat{i} + a\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরটি লম্ব হবে?

Solⁿ: $a^2 - 5a + 6 = 0$

$\Rightarrow a^2 - 3a - 2a = 0$

$\Rightarrow (a-3)(a-2) = 0$

$\Rightarrow a = 3, 2$

(21) নিচের কোন ভেক্টরটি $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ও $4\hat{i} + 6\hat{j} - \hat{k}$ এর উভয়ের সাথে লম্ব হবে?

Solⁿ: $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$\vec{B} = 4\hat{i} + 6\hat{j} - \hat{k}$

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 6 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -5\hat{i} + \cancel{6\hat{j}} + 6\hat{j} + 16\hat{k}$$

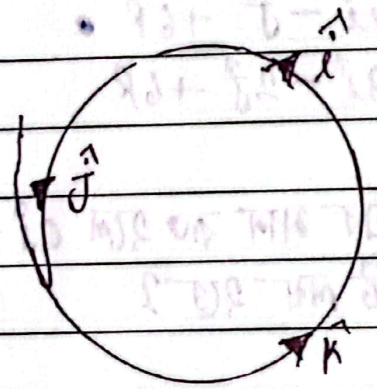
$$= -5\hat{i} + 6\hat{j} + 16\hat{k}$$ (Ans.)

(22) নিচের কোনটি $4\hat{i}$ এর সমান হবে

(i) $(\hat{j}\times\hat{i})\times\hat{j}$ (iii) $(\hat{i}\times\hat{j})\times\hat{i}$

(ii) $(\hat{i}\times\hat{j})\times\hat{k}$ (iv) $(\hat{j}\times\hat{k})\times\hat{j}$

Solⁿ:



$\hat{j}\times\hat{i} = -\hat{k}$

$-(\hat{k}\times\hat{j}) = -\hat{i}$

Ans: (i)

(23) একটি ত্রিভুজের দুটি সন্নিহিত বাহু $3\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ এবং $2\hat{i}-\hat{k}$ হলে এর ক্ষেত্রফল কত?

Solⁿ: $\vec{A} = 3\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$

$\vec{B} = 2\hat{i}-\hat{k}$

ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\vec{A}\times\vec{B}|$

এখন, $|\vec{A}\times\vec{B}|$

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

$$\vec{A}\times\vec{B} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\,\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$|\vec{A}\times\vec{B}| = \sqrt{1^2+5^2+2^2} = \sqrt{30}$$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\sqrt{30}$

(24) $\vec{A} = 2\hat{i}+\hat{j}$ ভেক্টরটি x অক্ষের সাথে কত কোণ উৎপন্ন করে?

Solⁿ: $\vec{A} = 2\hat{i}+\hat{j}$

$\vec{B} = \hat{i}$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$= \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$= 26.56^\circ$ (Ans.)

(25) $(\hat{i}+\hat{j})$ এবং $-\hat{k}$ এর মধ্যবর্তী কোণ কত?

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{-1\times 0}{\sqrt{2}\times 1} = 90^\circ \text{ (Ans.)}$$

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

(26) একটি বস্তুকে $(a\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k})$ N বল প্রয়োগে $(2, a, 4)$ m বিন্দু থেকে $(6, 8, 3a)$ m অবস্থানে নেওয়াতে 42 J কাজ হয়। a এর মান কত?

Solⁿ: $W = FS$ | $\vec{S} = 4\hat{i} + (8-a)\hat{j} + (3a-4)\hat{k}$

$42 = \sqrt{a^2+4+16}\sqrt{16+64-32a+a^2+9a^2-24a+16}$

$\Rightarrow 42^2 = (a^2+20)(10a^2-56a+96)$

$\vec{S} = 4\hat{i} + (8-a)\hat{j} + (3a-4)\hat{k}$

$\vec{F} = a\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$

$W = \vec{F}\cdot\vec{S}$

$\Rightarrow 42 = 4a + 16 - 2a + 12a - 16$

$\Rightarrow 14a = 42$

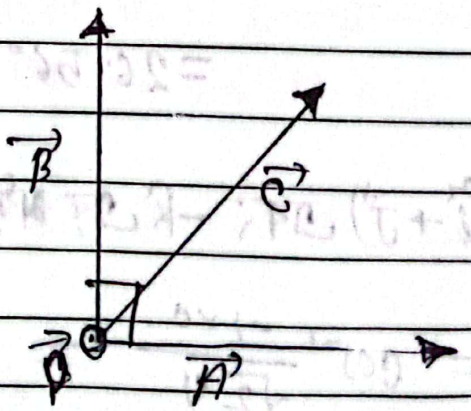
$\Rightarrow a = 3$

$a = 3$ (Ans.)

(27) তিনটি Vector $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ যাদের মান যথাক্রমে 4, 3, 5। এখানে A ও B এর লব্ধি C হলে $|\vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B})| = ?$

Solⁿ: $\vec{A} = 4\hat{i}$

$\vec{B} = 3\hat{j}$



$\vec{A} \times \vec{B} = AB\sin\theta$

$\Rightarrow \vec{P} = 3 \times 4 \sin 90°$

$\Rightarrow \vec{P} = 12$

Scanned with CamScanner

Subject : ..... Date : .....

$\vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{C} \times \vec{D}$

$= CD \sin\alpha$

$= 5 \times 12 \sin 90^\circ$

$= 60$

(28) $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{B} \times \vec{A}$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ কত?

$\vec{A} \times \vec{B} = AB\sin\theta\,\hat{n}$

$\vec{B} \times \vec{A} = AB\sin\theta(-\hat{n})$

$\therefore AB\sin\theta = -AB\sin\theta$

$\Rightarrow 2AB\sin\theta = 0$

$\theta = \sin^{-1}(0)$

$\theta = 180^\circ$ (Ans.)

(29) $\vec{F} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 7\hat{k}$ বল ভেক্টরটির x-Z তলে মান কত হবে?

Solⁿ: $F = \sqrt{2^2 + 7^2}$

$= \sqrt{53}$

(30) কোনো একটি বিন্দুর অবস্থান (2, 3, 1); প্রযুক্ত বল উক্ত বিন্দুতে $3\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k}$, টর্ক ভেক্টর কত?

Solⁿ: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

$= (2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) \times (3\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k})$

JANANI

Scanned with CamScanner

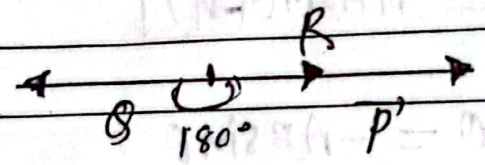
Subject : ..... Date : .....

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -8\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$$ (Ans.)

(31) দুটি Vector $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর লব্ধি $\vec{P}$ এর দিক বরাবর ক্রিয়া করলে $\vec{P} \times \vec{Q} = ?$

Solⁿ:



$$\vec{P} \times \vec{Q} = PQ \sin 180° \hat{n}$$
$$= 0$$ (Ans.)

(32) $\vec{A} = a\hat{i}$, $\vec{B} = a\hat{j}$, $\vec{C} = a\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি দ্বারা গঠিত ঘনকের কর্ণের দৈর্ঘ্য কত?

Solⁿ: মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে ঘনকের কৌণিক বিন্দু নির্দেশিত ভেক্টর $= a\hat{i} + a\hat{j} + a\hat{k}$

$\therefore$ কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}\,a$.

(33) $(\hat{i} \times \hat{j}) \cdot \hat{k} = ?$

$\Rightarrow \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$

$\hat{k} \cdot \hat{k} = 1.1 \cos 0°$

$= 1$ (Ans.)

JANANI

Scanned with CamScanner